NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 99, noviembre de 2018, páginas 27-49

Aprendizaje del concepto de tendencia a partir de representaciones gráficas con la metodología del Aula Invertida

Rosa Mª Fernández Barcenilla, Tomás Ortega del Rincón, Cristina Pecharromán Gómez
(Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid. España)

Fecha de recepción: 22 de diciembre de 2017
Fecha de aceptación: 3 de septiembre de 2018

Resumen Se presenta una investigación práctica sobre los aprendizajes de tendencias finita e infinita, ambas sobre el eje de abscisas y sobre la gráfica de una función. En el artículo se considera un marco teórico derivado de investigaciones realizadas sobre el concepto de límite. El marco metodológico es un modelo de clase invertida. Esta metodología se desarrolla en cuatro sesiones de docencia y en cada una de ellas se proyecta un vídeo elaborado con GeoGebra. Se analiza el aprendizaje de los alumnos y la propia metodología mediante entrevistas y un test validado por expertos. Finalmente, se identifican varios errores de interpretación y se hace una propuesta docente.

Palabras clave Aproximación, tendencia finita, tendencia infinita, clase invertida, docencia, aprendizaje.

Title **Learning about the concept of tendency from graphical representations**

Abstract This article presents a practical research on the learning of finite and infinite tendencies, both on the abscissa axis and on the graph of a function. The article uses a theoretical framework derived from some previous research carried out on the concept of limit. The methodological framework, based on the flipped classroom methodology is developed in four sessions of teaching, in which it is projected a video prepared with GeoGebra in each. An addition, the students' learning and the methodology itself are analyzed through interviews and a test validated by experts. Finally, several errors of interpretation are discovered and a teaching proposal is made.

Keywords Approximation, finite tendency, infinite tendency, flipped classroom, teaching, learning.

1. Introducción

Ha pasado más de medio siglo desde que Bloom (1956) advirtiera que el trabajo del estudiante en clase utilizando metodologías tradicionales es bajo, ya que se centra principalmente en los dos niveles de comprensión más básicos (Recordar y Entender), mientras que el trabajo fuera del aula se dedica a las categorías superiores de la taxonomía de Bloom (Aplicar, Analizar, Evaluar, Crear). Begmanny and Sams (2012) definieron el *Flipped Classroom* (aula invertida) como un modelo pedagógico que transfiere el trabajo de determinados procesos de aprendizaje fuera del aula y utiliza el tiempo de clase para facilitar y potenciar otros procesos de adquisición y práctica de conocimientos de nivel superior. Este modelo invierte o "voltea" el diseño habitual de aula donde el tiempo típicamente de clase se suele utilizar en la transferencia de información (generalmente a través de una metodología expositiva, como si se tratase de asistir a una conferencia), mientras que la mayor parte las tareas de mayor dificultad se llevaban a cabo fuera del aula a través de “deberes”, aunque posteriormente sean corregidos en el aula. La clase invertida favorece sobre todo a materias como ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (Berret, 2012).

El hecho de que los estudiantes estén acostumbrados al estilo de clase tradicional, puede crear dificultades para adaptarse a esta nueva forma de aprender. La presentación de expectativas claras para los estudiantes ayudará a aumentar su interés en el aula invertida (AI) (Roehl, Reddy, & Shannon, 2012), ya que algunas de las docencias fallidas del AI pueden atribuirse a las expectativas poco claras del instructor. Por otra parte, Aronson, Arfstrom, & Tam (2013) indican la diferencia de valoración de los estudiantes ante la nueva metodología y señalan que, mientras que unos estudiantes encuentran nuevo y emocionante el aprendizaje activo que se produce en un AI sustituyendo a la conferencia; a otros les resulta difícil seguir esta metodología. Unas y otras actitudes han provocado valoraciones más bajas en las evaluaciones de los estudiantes sobre algunos profesores que seguían la metodología propia del AI, metodología que requiere que los estudiantes tomen parte de la responsabilidad de aprender por sí mismos.

Para Bishop & Verleger (2013, p. 5) el AI contiene dos partes: *"actividades interactivas de aprendizaje en grupo dentro del aula, y la instrucción individual basada en computadoras directa fuera del aula"*. Rechazan las definiciones más amplias, con el argumento de que la asignación de lecturas fuera de clase y tener una discusión en clase no constituye un AI. Bergmann, Overmyer, & Willie (2014) indican que el AI requiere *“mover la entrega de material fuera del horario de clases formales (a través de extensas notas, vídeos grabados, conferencias y otros medios apropiados) y usar los periodos de clase formal de los estudiantes para llevar a cabo actividades de colaboración e interactivas relacionadas con ese material"* (tomado de Butt, 2014, p. 33). Para Bergmann, Overmyer, & Willie (2014) un AI no es simplemente vídeos en línea, la sustitución de los profesores por videos, o dejar a los estudiantes aprender por su cuenta. El AI está diseñada para aumentar el tiempo de aprendizaje personalizado entre estudiantes y profesores, ayudar a los estudiantes a involucrarse y ser responsables en su aprendizaje; y esto se logra a través de actividades de aprendizaje activo durante el tiempo de clase. Se trata de un enfoque integral que combina la instrucción directa con métodos activos que promuevan el incremento de compromiso e implicación de los estudiantes con el contenido del curso para mejorar su comprensión conceptual. Con el fin de poner en práctica la implementación del aprendizaje activo, los profesores deben estar dispuestos a hacer cambios de la metodología tradicional expositiva en las que los profesores hablan y los estudiantes escuchan. Bonwell & Eison (1991, p. iii) definen el aprendizaje activo como "actividades de instrucción basadas en que los estudiantes deben hacer las cosas y pensar en lo que están haciendo". Estos autores indican que se debe poner menos énfasis en la transmisión de información y más en el desarrollo de habilidades de los estudiantes y, al poner mayor interés en la exploración de las propias actitudes y valores de los estudiantes, éstos participan en pensamientos de orden superior (análisis, síntesis, evaluación), se involucran más en el proceso de aprendizaje y aprenden más. Estos mismos autores destacan la importancia de hacer preguntas que fomenten la discusión, el análisis y la reflexión; preguntas con las que los alumnos se sientan cómodos con su participación. Con estas premisas es adecuado proponer preguntas sobre las que los alumnos deben pensar en pares o en grupos pequeños, compartir sus reflexiones y exponer sus resultados emitiendo una respuesta. Para Prince (2004, p. 225) el aprendizaje activo es *"la introducción de actividades en la clase tradicional y promover la participación de los estudiantes"*. De forma similar se expresan Zayapragassarazan & Kumar (2012, p. 3), para quienes *"el aprendizaje activo implica proporcionar oportunidades a los estudiantes de hablar con sentido, escuchar, escribir, leer y reflexionar sobre el contenido, ideas, problemas y preocupaciones de una materia académica”.*

Por otra parte, la metodología del AI, salvo para unos pocos estudiantes que no les gusta los cambios fuertes, es positiva (Bishop & Verleger, 2013). Esos estudiantes no se acomodan con rapidez porque prefieren trabajar solos, están acostumbrados a clases tradicionales y completan las tareas personales en un entorno elegido por ellos (Roehl, Reddy, & Shannon, 2013). Así, muchos estudiantes están a favor del cambio, pero otros no están de acuerdo y razonan que no les gusta la metodología del AI, porque no pueden recibir pasivamente el material en clase, y están obligados a ser responsables de su propio aprendizaje (Berret, 2012). Por contra, Verleur, Heuvelman, & Verhagen (2011 p. 573) indican que "los estudiantes de hoy están cómodos en entornos de imágenes ricas, tienen necesidad de interactividad, son emocionalmente abiertos, y muestran una preferencia por actividades que promuevan y refuercen la interacción social".

El uso de vídeos en línea se convierte en una práctica crucial en el AI, ya que los alumnos se sienten cómodos con ellos debido a la facilidad de ser visionados (Bondad-Brown, Rice, & Pearce, 2012). Sin embargo, para que sean adecuados estos vídeos tienen que cumplir ciertos requisitos: deben ser cortos (Miller, 2012, y Verleur, Heuvelman, & Verhagen, 2011), ya que si son demasiado largos, los estudiantes se aburren, o no tienen tiempo para verlos; el contenido de los videos debe tener una cantidad manejable de información (Miller, 2012); el contenido debe ser lo suficientemente interesante como para que los estudiantes quieran aprender de él; tienen que ser cómodamente accesibles, útiles y fáciles de usar (Falk, Sockel, & Chen, 2005); el diseño debe de estar ajustado al usuario y, por tanto, deben ser creados con la mente centrada en los estudiantes; finalmente, se debe prever cierta interactividad, ya que ésta mejora la experiencia del usuario (Yates & Noyes, 2007). Con estas características los alumnos estarán más interesados en los videos cuando se relacionen bien con los contenidos (Huang, Chen, & Weng, 2012).

La investigación que aquí se describe se basa en el análisis de los procesos docentes que tienen lugar siguiendo la metodología del AI para que los alumnos adquieran el concepto de tendencia, que no es otro que el de límite. Sin embargo, como indica Kilpatrick (1998) el aprendizaje de este concepto es la culminación de los aprendizajes de los procesos subyacentes, y no son pocos los que conducen a él. Para varios investigadores (Cornu, 1983; Blázquez, 1999; Blázquez y Ortega, 2000, 2001a, 2001b, 2002) este concepto es de los que tienen mayor grado de dificultad debido a los fenómenos que organiza entre ambas variables funcionales (Claros Mellado, Sánchez Compaña y Coriat Benarroch, 2013; Sánchez Compaña, 2013). Otras investigaciones (Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic, 1996; Valls, Pons, y Llinares, 2011; Arce, Conejo y Ortega, 2016) ponen el énfasis en la falta de coordinación general entre los valores de la variable y de la función, dificultad insalvable para muchos alumnos de Bachillerato. Asimismo, la significación escolar que dan los alumnos al concepto de límite están asociadas a errores de comprensión (Fernández Plaza, 2015). Por otra parte, la no congruencia entre los sistemas de representación (Duval, 1999) aumenta las dificultades de aprendizaje. Aquí se considera conceptualización de Blázquez y Ortega (2002), que es equivalente a la definición métrica y que según Gatica (2007) no es tan difícil de comprender por los alumnos. Se reproducen aquí las conceptualizaciones de límite finito en un punto y de límite infinito positivo.

$$\underset{x\to a}{Lim} f(x) = L \text{ sií para toda aproximación } K \text{ de } L\ (K \neq L) \text{ existe un entorno}$$
$$\text{reducido de } a \text{ tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación.}$$

$$\underset{x\to a}{Lim} f(x) = +\infty \text{ sií para toda aproximación } K \text{ de } L\ (K \neq L) \text{ existe un entorno}$$
$$\text{reducido de } a \text{ tal que todas sus imágenes mejoran dicha aproximación } (f(x) > K).$$

En el primer caso *f(x)* tiende a L y en el segundo caso *f(x)* tiende a $+\infty$.

Por otra parte, Ortega y Pecharromán (2010, 2014), siguiendo el modelo de aprendizaje basado en estadios de aprendizaje (Socas, 2007), analiza las acciones de aprendizaje partiendo de las representaciones gráficas de las funciones y prueba que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) alcanzan el estadio semiótico de sus propiedades globales, adquieren competencias estructurales y, en algunos casos, llegan al estadio autónomo. Estos autores consideran que el punto de partida de estos aprendizajes está en las representaciones gráficas y, por esta razón, se han utilizado videos realizados con GeoGebra basados en representaciones gráficas dinámicas, Así los alumnos apreciarán de forma gráfica el concepto de tendencia y lo distinguirán del de aproximación.

Teniendo en cuenta las dificultades que entraña el concepto de límite, el primer objetivo es investigar cómo aprenden los alumnos los conceptos de tendencia finita e infinita sobre el eje de abscisas y sobre la gráfica de una función, analizando si discriminan tendencia y aproximación. El segundo objetivo consiste analizar la valoración que hacen los alumnos del AI examinando la satisfacción que produce en ellos esta metodología.

2. Marcos teórico metodológico

Los antecedentes considerados sobre el concepto de límite aportan un marco teórico que va a ser útil para analizar las producciones de los alumnos, especialmente la que llevaron a cabo Blázquez y Ortega (2002). En este marco se consideran las conceptualizaciones escritas en el párrafo anterior y la clave es la discriminación entre aproximación y tendencia. Se produce una tendencia sií se mejora cualquier aproximación fijada distinta del propio límite (tienden al límite), cosa que no tiene por qué ocurrir en aproximaciones sucesivas. Es más, en este marco se considera que cualquier número real es una aproximación de cualquier otro y también de ∞, tanto positivo como negativo.

Por otra parte, Talbert (2011, 2013 y 2014) hace una revisión de sobre las aulas invertidas, preconiza una planificación altamente estructurada y en Talbert (2014) se propone el siguiente modelo de docencia de cinco fases:

1. Una breve **descripción** del próximo contenido para situar el nuevo material en el contexto de lo que ya se conoce (aprendizaje significativo).
2. Una lista de objetivos básicos formada por los contenidos y acciones que los alumnos deben tener adquiridos y otra de objetivos avanzados que son habilidades que los estudiantes no tienen que dominar totalmente cuando vienen a clase, pero que deberán adquirir fluidez en su dominio con el tiempo.
3. Una colección de **recursos de vídeo** y de **impresión** que dan a los estudiantes el contacto inicial con el nuevo material y proporcionan datos de entrenamiento para la formación de fluidez básica.
4. Un **conjunto de ejercicios**, relacionados con la lista de objetivos de aprendizaje básicos, que llevan a los estudiantes a alcanzar la consecución de estos objetivos.
5. Una lista de **especificaciones** para saber cómo y cuándo presentar las respuestas a las tareas asignadas.

3. Desarrollo de la experimentación. Discusión de resultados

En el curso académico 2014/15 se llevó a cabo una experiencia piloto en un IES de Valladolid con alumnado de 4º de ESO (opción A). La investigadora participó en esa docencia junto con la profesora titular. Se pasó a los alumnos un test inicial para recabar datos sobre la experimentación que se iba a llevar a cabo. En general, el alumnado se mostró satisfecho y más motivado que con las metodologías clásicas. También se constató que parte del alumnado no se implicó en la nueva propuesta metodológica y, quizá por la novedad de la misma o por la falta de interés que mostraron algunos alumnos por la asignatura, éstos no visualizaron los vídeos en sus casas. Ante ese hecho, se optó por adaptar la metodología al modelo de Talbert en la presente experimentación: se presentan los nuevos contenidos, se organiza la docencia pensando en los objetivos que se deben alcanzar a partir de los previos (test inicial, cuadernos y entrevista con el profesorado), se facilita a los alumnos los vídeos y material impreso para el trabajo de aula, se desarrolla una práctica guiada y se diseñan pruebas específicas de los contenidos tratados. Ahora se han visualizado los vídeos en el aula para ser comentados posteriormente, y así, asegurar que los alumnos vieran estos vídeos al menos una vez. Además, se subieron a la plataforma Moodle del IES para que pudieran ser consultados por el alumnado tantas veces como deseara. Con estas previsiones se llevó a cabo esta nueva experiencia con 11 alumnos de 1º Bachillerato de Ciencias en un IES rural de Palencia durante el curso 2015/16. En relación con este artículo se considera la docencia en la que se utilizaron los 4 primeros vídeos que duran entre 2 y 3 minutos y tras la proyección de cada uno, se siguieron los siguientes pasos:

- Debate grupal: Planteamiento de dudas, reflexiones y aportaciones en relación al vídeo expuesto. Todos los diálogos se han recogido y analizado minuciosamente.
- Trabajo individual y por pares a partir de las actividades propuestas en el material impreso facilitado.
- Cumplimentación individual y de forma progresiva, según se va avanzando en la docencia del cuestionario que se elaboró a partir del test inicial y de las sugerencias de validación emitidas por un comité de expertos de varias universidades

El test final se compone de unas preguntas de respuesta doble, otras de respuesta abierta que los alumnos deben justificar, un tercer bloque sobre autoevaluación de aprendizajes y, en la última parte, se pregunta a los alumnos sobre dificultades del contenido e interés por el aprendizaje. Los ítems se nombran *P.n y los alumnos con A.n*.

3.1. Discusión de resultados de la primera sesión

En el primer vídeo, el punto *P* (*P'*) está dotado de movimiento y se va acercando al punto *A* mejorando cualquier aproximación *D* (*D'*) fijada. Esta animación se reproduce automáticamente *P* se acerca a *A* por la derecha y P' por la izquierda. El proceso se repite con nuevas posiciones de *D y D'* más cercanas a *A* (*P* y *P'* mejoran cualquier aproximación fijada). Además, en la proyección aparece el texto que sigue a la figura:

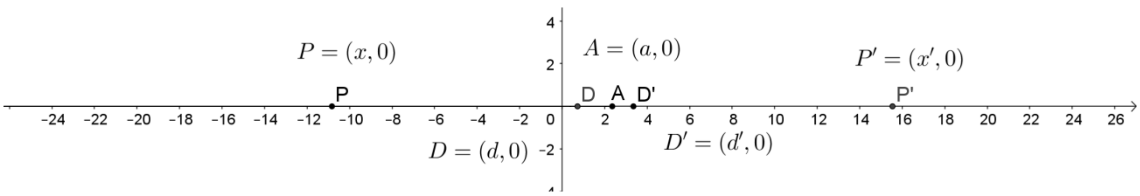

Figura 1. Fotograma de la tendencia finita en el eje de abscisas

- *Un punto en el plano cartesiano queda determinado por su abscisa y por su ordenada,* P=(x, y). *Un punto* P *tiende al punto* A *por la izquierda, si mejora cualquier aproximación de otro punto* D *previamente fijado.*
- *Análogamente, estamos visualizando sucesivas posiciones del punto* P´ *que está tendiendo a* A *por la derecha.*

- *Las abscisas,* x, *de* P *tienden por la izquierda a la abscisa,* a*, de* A, *si* x *mejora a la abscisa del punto* D *arbitrario, previamente fijado.*
- *Se mueve el punto* P *y se sitúan* A *y* D *en posiciones diferentes.*
- *Que* P *tiende a* A *se simboliza* P→A *y que* x *tiende a* a *, se simboliza por* x → a.
- *Que* x *tiende a a por su izquierda se simboliza* $x \to a^{-}$.
- *Que* x *tiende a a por la derecha se simboliza* $x \to a^{+}$.

Los alumnos van cumplimentando el test que, en esta sesión, tiene por objetivo valorar si discriminan entre aproximación y tendencia.

P.1. El punto D *respecto de* A *es: una aproximación* ◯*, una tendencia* ◯
P.2. Los puntos P *y* P' *llegan a estar más cerca de* A *que* D*, por tanto: se aproximan a* A ◯*, tienden a* A ◯
P.3. Las abscisas de P *y de* P' *llegan a estar más cerca de la abscisa de* A *que la abscisa de* D*: sí* ◯*, no* ◯
P.4. Si el punto D *estuviera más cerca de* A, P *y* P' *nunca estarían más cerca de* A *que* D*: sí* ◯*, no* ◯
P.5. ¿Podría situar el punto D *tan cerca de* A*, de modo que no podría ser mejorada la proximidad a* A *por ningún punto* P *y* P'*?: sí* ◯ *, no* ◯
P.6. Siempre se pueden encontrar ordenadas de P *y de* P' *que están más cerca de la ordenada de* A *que la ordenada de* D*: sí* ◯*, no* ◯

Las dos tablas siguientes expresan los resultados de los alumnos según el número de aciertos globales en cada ítem:

Aciertos	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Nº alumnos	2	3	2	3	0	1	0
% Alumnos	18,18%	27,27%	18,18%	27,27%	0,00%	9,09%	0,00%

Tabla 1. Frecuencia de la variable aciertos de los alumnos

Respuestas	**P.1**	**P.2**	**P.3**	**P.4**	**P.5**	**P.6**
Aciertos	9	10	6	5	6	9
Fallos	2	1	5	3	3	1
N/C				3	2	1

Tabla 2. Aciertos y fallos de cada ítem

La segunda cuestión, fue la que sumó mayor número de respuestas correctas y la cuarta el menor. Sin embargo, si fijamos nuestro punto de atención en la respuesta que obtuvo el mayor número de respuestas incorrectas, debemos reparar en la tercera. En el caso de las cuestiones 4 y 5 hubo alumnos que no contestaron. Dichas cuestiones fueron enunciadas en forma negativa y es posible que esta redacción pudiera dificultar la comprensión de las mismas.

Desde una perspectiva cualitativa, se puede afirmar que prácticamente la totalidad de los alumnos comprenden el concepto de aproximación y lo diferencian del concepto de tendencia, según la información de las preguntas *P.1* y *P.2*. Sin embargo, que cuando un punto *P* tiende al punto *A*, éste mejora cualquier aproximación de otro punto *D* arbitrario y fijado previamente es donde hay bastantes fracasos. Asimismo, se pone en evidencia que es más sencillo para ellos interpretar las tendencias a través del propio punto que a través de sus abscisas.

Para averiguar la competencia lingüística y comunicativa (verbal y gráfica) en relación a los conceptos de aproximación y tendencia se les plantearon tres preguntas abiertas:

P.7. ¿Qué diferencia hay entre aproximar y tender?

Según sus respuestas, los alumnos pueden ser clasificados en tres grupos con cierta uniformidad.

- El primer grupo expone ideas correctas, aunque cada alumno utiliza diferentes expresiones para manifestar lo que han interiorizado tras la visualización del vídeo:

  *A2.- Aproximar es que se acerca (*D*) y tender que va hacia ello (*P, P'*).*
  A4.- Aproximar es acercarse, pero por mucho que se aproxime, tender es algo más, es un punto más próximo a lo que tiende.
  A5.- Tender es más que aproximar.

- El segundo grupo discrimina entre aproximación y tendencia, pero manifiesta concepciones erróneas:

  A3.- Aproximar es acercarse lo más posible y tender es pasar por el punto."
  - Error de considerar la tendencia como un valor alcanzable siempre (ETA).

  A1.- Que tender casi llega a tocar y aproximar se queda más lejos."
  - Error de considerar la tendencia como un valor inalcanzable (ETVI).

  A8.- Aproximar es que se acerca y tender es que se acerca al infinito."
  - Error de considerar la tendencia siempre como infinita (ETI):

- Por último, el tercer grupo, muestra su incomprensión respecto a estos conceptos, respondiendo de forma incoherente.

  A6.- Que en la aproximación llega al punto y en la tendencia no llega a pasar por el punto al que tiende.
  A7.- A la hora de aproximar se tiene que tener un valor fijo, sin embargo para tender se puede coger cualquier valor cercano a A.
  A11.- Tender se refiere a una variable, función o valor determinado. Aproximar se realiza de forma exacta es desconocido o difícil de obtener.
  A9.- No consigo encontrar la diferencia aunque sí comprendo que son conceptos distintos.
  A10.- Tender es aproximarse a una meta.

En resumen, casi la mitad de los alumnos no concretan diferencias entre aproximación y tendencia; la mitad del resto (del 55%) discrimina con argumentos válidos y, la otra mitad, expone razonamientos erróneos y utiliza un vocabulario impreciso.

Con el fin de recabar información globalizada sobre la representación gráfica de la tendencia finita en las abscisas en la recta real y analizar qué sistemas de representación utilizan los alumnos se les plantearon las dos siguientes preguntas abiertas:

P.8. Representa una tendencia finita de la abscisa.

Sólo dos alumnos representan gráficamente la tendencia finita sobre el eje de abscisas señalando algunos de los puntos de interés y la del segundo bastante incompleta:

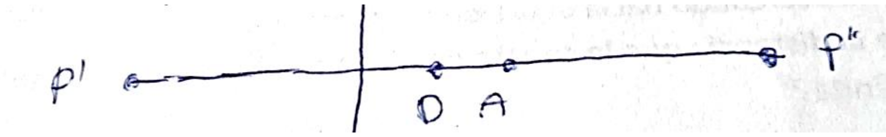

Figura 2: Respuesta del alumno A10

Figura 3: Respuesta del alumno A8

Otros tres alumnos optan por una representación simbólica, como la que se muestra a continuación la respuesta del alumno *A11*:

Figura 4: Respuesta del alumno A11

Parece que los alumnos se han sentido desconcertados por esta cuestión tan abierta y sólo algunos comprenden el sentido de la pregunta, éstos concretan la tendencia en las abscisas y optan por una representación gráfica o por una simbólica, lo que sin duda es una discriminación entre ambas.

P.9. ¿Qué es para ti la tendencia de abscisas finita?

En el análisis se tienen en cuenta las diferentes interpretaciones (significaciones) detectadas en el vocabulario y expresiones de los alumnos. Éstas se categorizan por su: Finitud (F), Dinamismo (D), Rebasamiento (R), Inalcanzabilidad (I) y Aproximación óptima (A):

Categorías	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
F - Finitud	8	0,38
D - Dinamismo	7	0,33
I - Inalcanzabilidad	3	0,14
R - Rebasamiento	2	0,10
A - Aproximacion óptima	1	0,05

Tabla 3. Frecuencias de las significaciones de tendencia

Con el fin de ver si hay una dependencia entre significados, se consideran las frecuencias de las intersecciones de los grupos de alumnos que asumen los mismos significados:

Intersecciones	**Nº alumnos**	**%**
D - I - F	3	27,27%
D - F - R	2	18,18%
A- D - F	1	9,09%
D - F	1	9,09%
F	1	9,09%
No contestan	3	27,27%

Tabla 4. Significados comunes

Según las respuestas, aparte de los alumnos que no responden, surgen tres grupos:

- El primero está formado por tres alumnos y asocia la tendencia finita de abscisas con el dinamismo inalcanzable finito (D-I-F). Lo expresan así:

  “Que casi llega a un punto concreto. Un punto que se acerca a otro sin llegar a tocarle.”, “Acercarse mucho a un punto sin tocarlo.”, “Acercarse más que cualquier otro punto.”

- Un segundo grupo, de dos alumnos, enfatiza en el dinamismo de llegada o rebasamiento del punto al que tiende, respondiendo:

  “Llegar a un punto fijo, pasando por otro móvil.” “La tendencia a un punto concreto por el que llega a pasar.”

- El tercer grupo, de tres alumnos, aporta respuestas simples que refuerzan el concepto de finitud, y en un caso, de aproximación óptima. Sus respuestas fueron:

  “Que esa tendencia está delimitada, no es infinita.”, “Una aproximación a una meta, que tiene principio y fin, x *toma valores menores a ∞.”, “La tendencia de un punto hasta otro punto determinado en cierto lugar.”*

Al ser preguntados por una tendencia finita, los alumnos, mayoritariamente, visualizan la finitud y el dinamismo, la diferencia está en que algunos de ellos consideran la alcanzabilidad o no de dicha tendencia. La combinación que más se repite es la del dinamismo inalcanzable finito (D-I-F) seguida de (D-F-R) dinamismo finito con llegada o rebasamiento. Sin embargo, el hecho de afirmarlo categóricamente, indica que los alumnos no ven la posibilidad de que no ocurra.

P.10. Representa gráficamente que la variable x tiende al valor 5 del eje de abscisas.

Sólo un alumno hace una representación gráfica que se puede considerar aceptable (*A4*). Otros cuatro hacen representaciones más incompleta y sólo consideran tendencias por la izquierda (*A2, A3, A7* y *A10).*

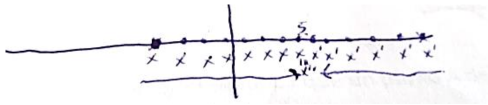

Figura 5. Respuesta del alumno A4

Figura 6. Respuestas de los alumnos A2, A3, A7 y A10

Otro alumno utiliza el simbolismo de los vídeos, pero no lo representa gráficamente.

Figura 7. Respuesta del alumno A11

Finalmente, cuatro alumnos no responden y otro alumno dibuja la gráfica de una función que, presumiblemente, tendría una asíntota vertical, *x=5*.

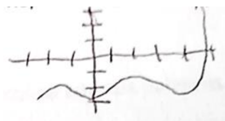

Figura 8. Respuesta del alumno A6 sobre la primera gráfica

Si contrastamos las respuestas dadas a *P.8* con las dadas a *P.10*, se observa que cuando se concreta el valor fijo al que tiende, responden más alumnos y con más precisión. Un amplio sector de ellos, sólo percibe la tendencia de manera imprecisa, ya que sólo representan la tendencia lateral izquierda (coincidiendo con orden usual de la recta real), pero en general se van acercando al concepto de tendencia, aunque sólo es alcanzado completamente por un alumno.

3.2. Discusión de resultados de la segunda sesión

En este vídeo, los puntos *H* y *H'* están dotados de movimiento, *C* y *K* son puntos fijos, y *Q y P* son puntos prefijados y alejados de *C* (a la derecha) y *K* (a la izquierda). En el movimiento hacia +∞, *H* supera a *P* y en el movimiento hacia -∞, las abscisas de *H'* son menores que las de *K*. Además de la imagen de la figura 9, tomada del vídeo, en la proyección aparece el texto que se transcribe a continuación de la misma:

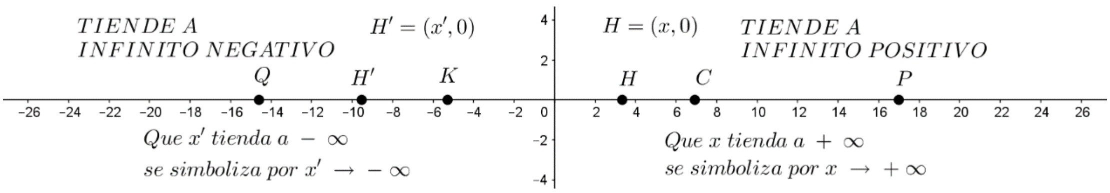

Figura 9. Fotograma de tendencia infinita en el eje de abscisas

- *Un punto* H *tiende a +infinito, si se aleja de cualquier punto* C *hacia la derecha más que cualquier punto,* P*, fijado.*
- *Un punto* H' *que se aleja de cualquier punto* K *hacia la izquierda más que cualquier punto,* Q*, fijado tiende a -infinito.*
- *Las abscisas,* x*, de* H *tienden a +infinito si* x *supera (es mayor que) la abscisa de cualquier punto* P*, previamente fijado; es decir,* x *toma valores mayores que cualquier número positivo.*
- *Las abscisas,* x *de* H'*, tienden a -infinito si* x *es menor que la abscisa de cualquier punto* Q *prefijado; es decir,* x *toma valores menores que cualquier número negativo.*
- *Movamos a posiciones diferentes los puntos* P *y* C*, por un lado, y* K *y* Q*, por otro.*

Los alumnos siguen cumplimentando el test que tiene por objeto valorar si comprenden la tendencia infinita de la abscisa y discriminan entre tendencia hacia +∞ y hacia -∞.

P.11. Elige la frase o frases que consideres verdaderas y justifica tu respuesta:

P11.1. *La tendencia infinita positiva es que el punto* P *se aleja del origen* O *sin saber hasta qué punto.*

P11.2. *Un punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito negativo si su abscisa es menor que la de cualquier otro punto* A *prefijado.*

P11.3. *Un punto* P *del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto* A *prefijado.*

Las tablas 5 y 6 expresan los aciertos y fallos de los alumnos:

Aciertos	**3**	**2**	**1**	**0**
Nº alumnos	1	5	1	4
% Alumnos	9,09%	45,45%	9,09%	36,36%

Tabla 5. Frecuencia de la variable aciertos de los alumnos

Respuestas	P11.1	P11.2	P11.3
Aciertos	5	2	7
Fallos	6	9	4

Tabla 6. Aciertos y fallos de cada ítem

El número de aciertos de *P11.1* es similar al de fallos y llama la atención la justificación errónea de dos alumnos. Para éstos el alejamiento sigue el orden natural de la recta real *"que se aleja hacia infinito",* y entienden que el alejamiento del origen se produce siempre hacia el infinito positivo. La frase que más dificultades ha generado en el alumnado es *P11.2*. Por el contrario, *P11.3*, que es la análoga a la anterior, pero para el infinito positivo, ha sido respondida correctamente por el mayor número de alumnos. Así, se puede afirmar que la mayoría de los alumnos comprenden que un punto *P* del eje de abscisas tiende a infinito positivo si su abscisa es mayor que la de cualquier otro punto *A* prefijado. Pero, salvo dos alumnos, el resto no interpreta correctamente la correspondiente analogía con el infinito negativo. Por tanto, la comprensión de la tendencia a infinito negativo presenta más dificultades y parece que no discriminan entre "tendencia a infinito" por la izquierda y por la derecha.

Con el fin de averiguar la competencia lingüística y comunicativa en relación al concepto de tendencia infinita y si discriminan la lateralidad infinita se les plantea la siguiente pregunta abierta:

P.12. ¿Cómo explicarías a un compañero qué es la tendencia infinita?

Sólo un alumno hace mención al infinito negativo de manera explícita: *"Cuando supera los puntos, cuando tienden a infinito y a - ∞ lo mismo".* Este alumno muestra imprecisión en relación a los puntos que se superan, ya que no indica que se supera cualquier punto fijado, para la tendencia hacia infinito positivo, y no utiliza otro verbo u expresión diferente para el infinito negativo y, en contra de lo que el mismo expone, no es exactamente lo mismo.

- Dos alumnos utilizan la tendencia infinita para explicar la expresión que contiene este término:

  A1.- Cuando un punto se ***aleja*** *tanto que acaba* ***tendiendo*** *a infinito.*
  A4.- Es superar cualquier número, ***tender*** *al infinito, acercarse sin tocarlo.*

- Tres alumnos han utilizado los verbos *alejar, partir, no parar;* y cierto grado de indefinición en relación al sentido de dichos movimientos. Lo consideran aplicable en ambos infinitos.

  A2.- Cuando un punto se aleja en el infinito respecto a otro punto prefijado.
  A3.- Partir de un origen y no saber dónde parar.
  A8.- Lo que se ***aleja*** P.

- Cuatro alumnos manifiestan diferentes errores en sus respuestas. Se transcriben sus respuestas y el tipo de error contenido en ellas.

  A5.- Que el valor que tomará será símbolo de infinito.
    - Error de considerar el símbolo infinito como un valor alcanzable (EIA)

  A7.- Cuando un punto se acerca al infinito.
    - Error de precisión en el lenguaje (EPL)

  A6.- Es cuando la x se aproxima a un punto al que llega y acaba.
    - Error de finitud del infinito alcanzable (EFIA)

  A10.- Una aproximación que toma valores infinitos.
    - Error que asocia infinitud a valores muy grandes (EAIV)

Los alumnos que escriben una explicación que se puede interpretar como correcta, ya que no incurren en contradicciones, utilizan diferentes acciones verbales y, quizá, influenciados por los vídeos, el verbo más repetido es "*alejar*", le sigue "*superar*" y, finalmente, *"partir sin determinar".*

Con el objetivo de averiguar si los alumnos han comprendido la diferencia entre tendencia finita e infinita se les propone la siguiente pregunta abierta.

P.13. ¿En qué se diferencia la tendencia finita de la tendencia infinita?

Solamente dos alumnos comparan y contrastan las dos situaciones de tendencia. Simplificando sus argumentos, ellos asocian la tendencia finita a "*un punto concreto conocido y determinado"*, y la tendencia infinita como "*algo desconocido, indeterminado, sin fin y que no acaba"*.

Además, cuatro alumnos muestran errores conceptuales, tres de ellos ya fueron detectados en el ítem anterior, y ahora se confirman, pero en la respuesta del cuarto ha aparecido una nueva concepción errónea sobre tendencia finita e infinita. Este alumno afirma que "*La tendencia finita es x puntos y la infinita es infinitos puntos".* En ambos razonamientos puede aparecer un error de discretización (Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990), pero en el primer caso se considera una discretización finita y en el segundo caso infinita. Este alumno no comprende que en ambas tendencias hay un tránsito hacia el límite por los infinitos puntos de un entorno. A este error le denominamos "Error de discretización en el proceso de la tendencia (EDT)".

Sin duda hay una confusión entre el infinito potencial y el infinito actual, lo que influirá en la discriminación entre tendencia finita e infinita. Para afianzar nuestras apreciaciones se formula el siguiente ítem que ejemplifica una situación concreta.

P.14. Un punto, P, situado en el eje de abscisas se va acercando hacia el origen de coordenadas recorriendo en cada segundo la mitad de la distancia que le separa de dicho punto. Justifica si esta tendencia es finita o infinita.

Sólo tres alumnos comprenden la tendencia finita de la situación presentada, cuatro alumnos la clasifican erróneamente como tendencia infinita y los cuatro alumnos restantes dicen sentirse confusos y no responden.

Sólo un alumno justifica su respuesta (el mismo del error EDT) y asegura que *"la tendencia es infinita, porque nunca lo alcanzará"*. Este alumno tiene la concepción errónea de relacionar la tendencia finita con la alcanzabilidad del valor concreto al que tiende y, cuando esto no ocurre, para él se trata de tendencia infinita. Se trata de un *error en la interpretación del concepto de tendencia* (ECT). Por tanto, este alumno no tiene adquirida la idea de infinito en intervalos acotados y también aparece un *error de iteración infinita de la tendencia* (EII) al considerar que el punto no es alcanzable en el proceso.

Esta cuestión reproduce la paradoja de Zenón, que es una situación compleja y requiere cierto grado de abstracción en la comprensión del infinito en procesos infinitos acotados. El alumnado refleja dificultades que también se han mostrado históricamente.

Finalmente, nos preguntamos si los alumnos comprenden mejor la tendencia finita o la tendencia infinita y para dar respuesta a esta pregunta se formula el siguiente ítem:

P.15. Comprendo el concepto de tendencia:

- *mejor la tendencia finita* ◯ *mejor la tendencia infinita* ◯
- *en los dos casos igual* ◯ *en ninguno* ◯
- *Observaciones:*

Los alumnos no han escrito observaciones, la mayor parte de ellos cree comprender mejor la tendencia infinita, algo menor es el número de alumnos que cree que comprende por igual ambas tendencias y menos de la quinta parte creen que comprenden mejor la tendencia finita.

3.3. Discusión de resultados de la tercera sesión

Se sigue aplicando la metodología establecida y además de la imagen de la figura 12, en la proyección aparece el texto que se transcribe tras ella:

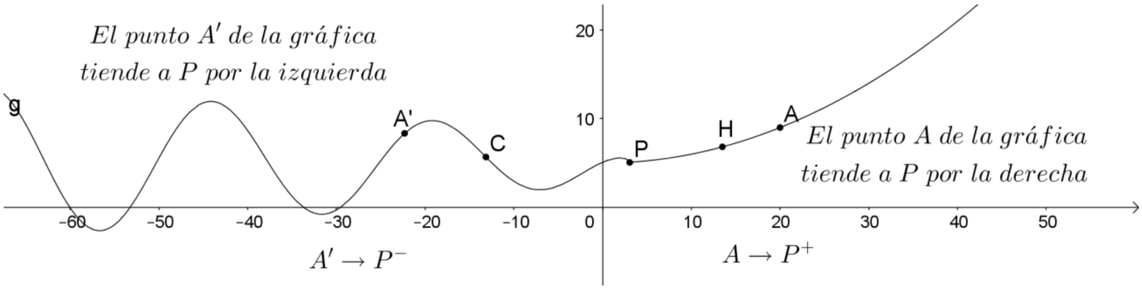

Figura 12. Fotograma de la tendencia finita en la gráfica

- *Veamos como los puntos* A *y* A' *tienden a* P *por la propia curva.*
- *Un punto de la gráfica,* A', *tiende por la izquierda a otro punto de la gráfica,* P, *cuando al recorrer esta gráfica hacia* P *por la izquierda,* A' *se acerca a este punto más que cualquier otro punto fijado,* C. *Se denota* A'→P$^-$. *Un punto de la gráfica,* A, *tiende por la derecha a otro punto de la gráfica,* P, *cuando al recorrer esta gráfica hacia* P *por la derecha,* A *se acerca a este punto más que cualquier punto otro fijado,* H. *Se denota* A→P$^+$.

Los alumnos cumplimentan los ítems del test con el fin de valorar si discriminan entre tendencias laterales.

P.16. Sólo es importante estudiar en la gráfica la tendencia siguiendo el orden de la recta real, es decir, de izquierda a derecha: sí ◯, *no* ◯

La mayoría de los alumnos (el 81,82%) responde correctamente, lo que hace pensar que los alumnos van adquiriendo el concepto de tendencia lateral. Para averiguar el nivel de comprensión del alumnado en relación a la conexión entre los conceptos de aproximación y tendencias laterales finitas, se les plantea la siguiente pregunta abierta:

P.17. Representa gráficamente que un punto de una gráfica, A, *tienda por la izquierda a otro punto de la gráfica,* P. *Ayúdate de algún punto que esté próximo a* P.

Se hace un análisis de sus representaciones estudiando si han utilizado puntos auxiliares próximos a *P* (Aprox) por la izquierda, si utilizan notación simbólica para indicar el sentido del movimiento (Not) y si han representado una gráfica en el plano cartesiano (Graf). En la tabla 7 se representan las respuestas de los alumnos según qué tipos de representación hayan utilizado.

Tipos	**Nº alumnos**	**%**
Graf + Aprox + Not	2	18,18%
Graf + Aprox	4	36,36%
Graf + Not	2	18,18%
Graf	1	9,09%
Not	1	9,09%

Tabla 7. Tipos de respuesta de los alumnos

Además de una respuesta en blanco aparecen todas las posibles asociaciones de respuestas que tienen cierto sentido, considerando que en todas debe aparecer una representación gráfica (Not+Aprox y Aprox carecen de sentido). A continuación se muestran las representaciones de los alumnos según la clasificación anterior:

- Graf + Aprox + Not

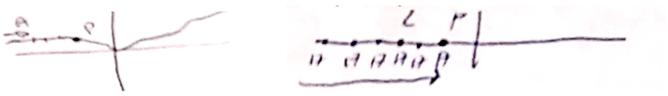

Figura 13: Alumnos A2 y A4

- Graf + Aprox

Figura 14: Alumnos A1, A7, A8 y A9

- Graf + Not

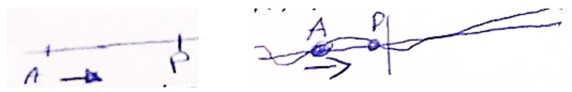

Figura 15. Alumnos A3 y A5

- Graf (Respuesta incorrecta):

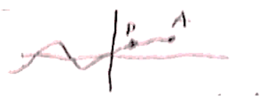

Figura 16. Alumnos A6

- Not (Simbólico)

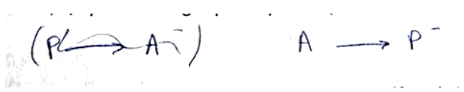

Figura 17. Respuesta alumno A11

La mayor parte del alumnado utiliza el plano cartesiano para representar la tendencia por la izquierda en una gráfica arbitraria, hay dos representaciones en las que se ha graficado la tendencia en el eje de abscisas y otra más que utiliza una recta. Los puntos de aproximación son utilizados por algo más de la mitad del alumnado. Sin embargo, la utilización de algún tipo de simbología que represente el sentido del movimiento sólo ha estado presente en alrededor de un tercio del alumnado, y en todos los casos se ha utilizado una flecha.

Para interpretar con mayor precisión la comprensión de los alumnos sobre tendencia se propone la siguiente cuestión sobre el significado.

P.18. Explica con tus palabras que significa que un punto de una gráfica, A*, tienda por la izquierda a otro punto* P*.*

Sólo tres alumnos responden correctamente y afirman que A se acerca a P más que cualquier otro punto fijado y otros dos alumnos responden de forma incompleta: el alumno *A4* manifiesta lo expuesto en respuestas (de vídeos anteriores) asociando la inalcanzabilidad a la tendencia finita (ETVI). Por otra parte, el alumno *A5* confunde los conceptos de dirección y sentido, pero parece que tiene adquirido el sentido de tendencia. Este alumno utiliza la acción verbal *"va"* que caracteriza el sentido del movimiento hacia un punto final.

A4: *Si* A → P⁻. *Qué* A *se* ***acerca a*** **P,** ***sin coincidir****, por la izquierda, por la gráfica.*
A5: El punto A ***va*** *en dirección al punto* P *por la izquierda, dirección de izquierda a derecha".*

Otros dos alumnos siguen confundiendo tendencia y aproximación, el primero de ellos asigna a *P* el carácter fijo. El segundo utiliza el verbo *"llegar",* cuya acción ya se había utilizado varias veces y que sugiere la alcanzabilidad.

A7: Se acerca a un punto A desde la izquierda"
A9: Que un punto A *se acerca al punto* P*, que* ***llega*** *desde la izquierda"*

Con el fin de contrastar si los alumnos han mejorado con la docencia su comprensión sobre la tendencia lateral por la derecha se les formularon otras dos preguntas análogas a las formuladas en la sesión anterior, pero ahora considerando tendencias por la derecha. El análisis de las mismas manifiesta que se mantiene el número de alumnos que utilizan la referencia del movimiento, disminuyen a la mitad los alumnos que utilizan correctamente los puntos de aproximación y también baja el número de alumnos que hacen una representación gráfica (de 8 a 6). Algunos otros (los mismos que antes) ven la necesidad de utilizar los sentidos de las flechas para representar esta tendencia, aunque descuidan la utilización de puntos de aproximación. Por tanto, la tendencia por la derecha presenta más dificultades que la tendencia por la izquierda y cierto sector del alumnado no es capaz de ver la similitud entre ambas.

3.4. Discusión de resultados de la cuarta sesión

La figura 18 es un fotograma del vídeo y en su proyección aparece el texto que se transcribe a continuación:

- *Un punto de la gráfica,* A*, se aleja infinitamente si al recorrer la gráfica se aleja de cualquier punto de la gráfica,* P*, más que cualquier otro punto,* H*, fijado en la gráfica. También se ve como el punto* A' *se aleja del punto* P *infinitamente.*
- *Considerando que el punto fijo es el origen de coordenadas,* O*, el punto* A *se aleja infinitamente recorriendo la gráfica si se aleja de* O *más que cualquier punto fijado en la gráfica. Lo mismo con cualquier otro punto,* D*, del plano.*

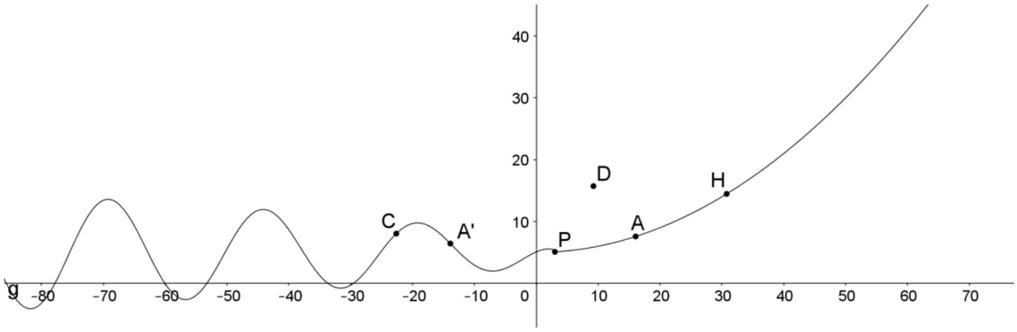

Figura 18. Tendencia infinita en la gráfica

Los alumnos siguen cumplimentando el test cuyo objetivo es valorar la comprensión de la tendencia hacia infinito de un punto de la gráfica.

P.19. Explica con tus palabras que significa que un punto A *de la gráfica tienda a infinito.*

Las respuestas de los alumnos se pueden agrupar en tres categorías: el grupo más numeroso está compuesto por 8 alumnos y en sus respuestas han utilizado los verbos *alejarse*, *moverse*, *tender*, *superar*… A su vez, se pueden agrupar en dos subgrupos:

- en el primer subgrupo se relaciona la tendencia hacia infinito con la acción de **alejamiento**.

  Cuatro alumnos consideran que se produce un ***alejamiento***. Concretamente, escriben lo siguiente: "*alejamiento de cualquier punto de la gráfica", "alejamiento del centro", "alejamiento del punto de partida" y "alejamiento del punto* P*"*.

- en el segundo subgrupo se relaciona la tendencia al infinito con la acción de ***superación***.

  Cuatro alumnos utilizan el verbo *superar*. Respectivamente, hacen referencia a: "*superar todos los puntos, positivamente, siguiendo la gráfica"; "superar a cualquier punto"; "superar todos los puntos hacia infinito"*

Se puede considerar que estos ocho alumnos comprenden el concepto de tendencia de un punto *A* de la gráfica a infinito, pero el resto del alumnado, otros tres, tienen una concepción errónea, éstos consideran al infinito como un ente concreto, pero para dos de ellos es alcanzable (EIA), mientras que para el restante es inalcanzable: *"Que se va a alejar hasta ese punto, pero sin llegar a el"* apareciendo nuevamente el error conceptual de tendencia (ECT).

Comparando estas respuestas con las que dieron los alumnos a su análoga del segundo vídeo, la *P.12*, que trataba sobre la tendencia infinita en el eje de abscisas, se observa que ha habido una evolución positiva respecto a la comprensión del concepto de tendencia. El alumno *A10* que mostró el error que asociaba la infinitud a valores muy grandes (EAIV), en esta ocasión ha respondido de una manera aceptable, aunque utiliza la palabra "tiende" que es lo que debe definir *"Tiende a infinito y supera a cualquier punto"*. Por tanto, la docencia que se ha llevado a cabo sí que produce una evolución positiva en la comprensión de la tendencia infinita.

3.5. Discusión sobre la valoración de la metodología

Terminada la docencia programada se procede a valorar la metodología del AI que se ha puesto en práctica, los vídeos, el aprendizaje y el interés. Para ello se ha utilizado el último bloque de ítems del test, estos ítems fueron cumplimentados por los alumnos y se analizaron las transcripciones de las grabaciones en vídeo de entrevistas con los alumnos.

Valora el aprendizaje a través del video de 1 a 5 (1 poco,…, 5 mucho): ____
Valora de 1 a 5 la dificultad del contenido del vídeo (1 fácil,…, 5 difícil) ____
Valora el interés por el aprendizaje que te ha despertado el vídeo (1 poco,…, 5 mucho): ____

Tras la recogida de los datos se ha procedido a extraer los datos estadísticos globales y las respectivas medias aritméticas de las preguntas *A*, *B* y *C* (aprendizaje, dificultad, interés) son: 2,44, 3,56 y 2,67. Los alumnos son conscientes de la dificultad de los contenidos y, frente a ello, manifiestan interés en el aprendizaje como han mostrado en el desarrollo de la sesión, pero ellos creen que no han aprendido totalmente lo que se ha trasmitido en los vídeos (hecho confirmado con el análisis de las anteriores respuestas). Se percibe un alto grado de abstenciones en su valoración y, posiblemente, porque en la práctica habitual no se hace reflexionar y autoevaluar al alumno de manera sistemática. Respecto a lo que han aprendido y a lo que no han comprendido, se manifiestan pesimistas, y es posible que no se pronuncien de manera precisa.

Para recoger información global relativa sobre la metodología se presentaron cuatro cuestiones con el fin de que valorasen los vídeos y la metodología: 1 (muy poco) - 5 (mucho).

Claridad en la exposición: 1 2 3 4 5
Interés del contenido: 1 2 3 4 5
El visionado de vídeos me facilita la comprensión de los conceptos: 1 2 3 4 5
Me ha gustado esta nueva metodología: 1 2 3 4 5

Las medias aritméticas de estos apartados (A, B, C, D) son las siguientes: 2,60, 3,00, 2,78, 3,00. Estas puntuaciones son moderadamente positivas y hay que considerarlas en un contexto de ruptura con las metodologías precedentes.

Respecto a la claridad en la exposición de los videos; en el primero, un alumno expresó que *"no entendía nada"* y, por tanto, hubo que reinterpretar verbalmente su contenido mediante preguntas guiadas y presentación de conflictos que les ayudaran a interpretar los conceptos abstractos que se estaban tratando.

En lo que respecta al interés por los contenidos, el alumnado ha manifestado buena acogida, colabora de forma activa en el marco de esta nueva metodología y muestra interés por el contenido matemático que se les transmite, siendo totalmente receptivos.

También la puntuación sobre el visionado de vídeos dinámicos indica que éstos les facilitan la comprensión de los conceptos.

Por último, en relación al gusto ante esta nueva metodología, el alumnado se manifiesta receptivo y, como se desprende de las declaraciones, la valoración media es positiva; así lo manifiestan ellos, por ejemplo, el alumno A4 dice: *"Es que esto es muy chulo, GeoGebra me gusta, no lo conocía, lo del movimiento gusta"*.

Se han hecho grabaciones en audio con un smartphone durante las 4 sesiones. Estas grabaciones han sido analizadas minuciosamente y se presenta a continuación uno de los diálogos entre la profesora y el alumno A2. Éste versa sobre aproximación, tendencia, dificultad e interés del contenido.

A2. O sea, ¿tender es mejor que aproximarse?

Profesora: *Tú, ¿qué opinas?*

A2: *Es una pregunta, es que estamos viendo vídeos y yo no sé si sé lo que tengo que saber para seguir avanzando, porque es un vídeo, después otro vídeo… Es que tengo dudas...*

P. Dudar significa que estás aprendiendo. Podríamos darte las definiciones de los conceptos y eso sería un aprendizaje pasivo; pero consideramos que es más interesantes el aprendizaje activo dónde vosotros vais construyendo vuestro conocimiento…

(Silencio)

P. Sí, efectivamente tender es mejorar cualquier aproximación.

A2. Es que otros años lo de las tendencias no nos lo explicaban así.

P. ¿Cómo te lo explicaban?

A2. Pues no me acuerdo, no sé,…

P. ¿Os parece muy difícil?

A2. A ratos.

P. Pero te parece interesante

A2. Sí.

Los alumnos perciben la dificultad de lo que están aprendiendo y muestran sus dudas, tanto de sus aprendizajes como de la metodología. Interpretamos que estas percepciones responden a la realidad en parte por la tradición de la docencia recibida hasta esta experimentación.

Respecto a los vídeos de tendencias finitas e infinitas en la curva, comentaron, al igual que en la sesión anterior, que es más fácil entender la tendencia infinita, porque como comentó un alumno mientras movía su mano hacia la derecha, *"es que el punto se va".* Asimismo, comentaron la novedad y la visualización directa de las aproximaciones y tendencias, lo comparan con las visualizaciones sobre la pizarra etcétera: *"Es que esto es muy nuevo, muy novedoso, muy directo …no es a lo que estamos "acostumbraos", "…lo vemos mejor lo del movimiento así que en la pizarra." "Aquí se tiene la cosa que está "animao" y se ve, eso está bien…"*

También se han recogido declaraciones de una observadora externa (profesora titular de Matemáticas del IES, que impartía una docencia tradicional) que estuvo presente en las cuatro sesiones de docencia. Para esta observadora los alumnos se fueron adaptando progresivamente a la metodología de forma satisfactoria. De hecho escribió la siguiente declaración: *"Los alumnos* *mostraron cierto recelo a la nueva metodología en la primera sesión, pero en las sucesivas se familiarizaron con el recurso tecnológico y siguieron con atención los vídeos que transmitían el contenido".* La observadora indica que al igual que con la metodología tradicional hubo que realizar alguna aclaración sobre el contenido que transmitían los vídeos, pero de manera más breve. La observadora señala también que ha constatado que los alumnos que expresaban en alto sus ideas o respuestas a las preguntas de la profesora investigadora habían alcanzado cierta comprensión sobre el contenido que transmiten los vídeos, lo que sin duda testifica la comprensión de los conceptos que se están tratando.

4. Conclusiones

Tras el análisis de las respuestas se han categorizado las diferentes interpretaciones aportadas por el vocabulario y las expresiones de los alumnos dando lugar a los cinco significados siguientes en relación a la tendencia finita: Finitud, Dinamismo, Rebasamiento, Inalcanzabilidad y Aproximación óptima. Estos concuerdan con los significados descritos por Fernandez Plaza (2015) sobre el concepto de límite.

Se han categorizado las siguientes concepciones erróneas del alumnado en relación al concepto de tendencia:

- Error de considerar la tendencia como un valor alcanzable (ETA).
- Error de considerar la tendencia como un valor inalcanzable (ETVI).
- Error de considerar la tendencia siempre como infinita (ETI)
- Error de considerar el símbolo infinito como un valor alcanzable (EIA)
- Error en la precisión del lenguaje (EPL)
- Error relacionado con la finitud del infinito alcanzable (EFIA)
- Error que asocia infinitud a valores muy grandes (EAIV).
- Error de discretización en el proceso de la tendencia (EDT).
- Error en la interpretación del concepto de tendencia (ECT).
- Error de iteración infinita (EII)

Las respuestas del primer test avalan las tesis de Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic, 1996; Valls, Pons, y Llinares, 2011; Arce, Conejo y Ortega, 2016 y ponen de manifiesto que los alumnos comprenden la idea de aproximación, pero no todos llegan a entender la coordinación entre variables y que las aproximaciones mejoran cualquier aproximación fijada.

También se ha constatado en un amplio sector de alumnado las mayores dificultades de la tendencia por la derecha (orden opuesto al natural de la recta real) y, tampoco discriminan entre el alejamiento infinito por la derecha o por la izquierda, lo que justifica que dichos alumnos no diferencian entre infinito positivo y negativo. Esta dificultad está presente cuando el alumno trata de representar, explicar, argumentar y razonar en cuestiones relacionadas con las tendencias laterales por la derecha. En cierto modo, la congruencia entre las representaciones verbal, simbólica y gráfica es menor en la lateralidad derecha que en la izquierda y, por tanto, como indicó Duval (1999) aumenta la dificultad de aprendizaje.

En relación a las palabras que se utilizan para intentar definir la tendencia infinita aparecen más acciones verbales que las detectadas por Fernández Plaza (2015). Además de aproximar y tender utilizan los siguientes verbos en forma positiva, reflexiva o negativa y en ocasiones seguidos de un complemento que potencia su acción: *acercar*, *ir*, *coincidir*, *alejar*, *partir*, *parar*, *superar*, *llegar*, *alcanzar*, *mover*. Aparece cierto grado de indefinición en relación al sentido de dichos movimientos que es aplicable tanto para el infinito positivo como para el negativo.

Perceptivamente, la mayor parte de los alumnos creen comprender mejor la tendencia infinita, hecho ya observado por Blázquez (1999) al estudiar los límites de sucesiones y de funciones. En esta docencia se optó por presentar primero la tendencia finita, pero a la vista de estos datos, lo razonable sería presentar a los alumnos la tendencia infinita antes que la finita. Sin embargo algunos alumnos se han mostrado desconcertados en alguna de las preguntas abiertas.

En la investigación se ha planificado, diseñado e implementado una metodología innovadora siguiendo el modelo de Talbert (2014) que ha incidido en la comprensión de conceptos matemáticos abstractos relacionados con el concepto de límite de una función, concepto de gran dificultad para el alumnado de educación secundaria (Cornú, 1983; Blázquez 1999). El alumnado ha mostrado interés durante el desarrollo de las sesiones, quizá porque los vídeos han cumplido las características descritas por los investigadores ya refenciados (Miller, 2012; Verleur, Heuvelman, & Verhagen, 2011; Falk, Sockel, & Chen, 2005): cortos, relacionados con el contenido, accesibles, útiles y fáciles de usar. Es cierto que ha habido cierta reticencia/oposición ante el cambio, sobre todo al principio de la experimentación, hecho que coincide con las afirmaciones de Bishop & Verleger (2013), de Verleur, Heuvelman, & Verhagen (2011) y de Roehl, Reddy, Shannon (2012), pero las valoraciones globales que hace el alumnado de la metodología seguida son positivas. Por otra parte, coincidimos con Verleur, Heuvelman, & Verhagen (2011) y los estudiantes se han sentido cómodos con el visionado de los vídeos y, sin duda alguna, ha reforzado la interacción social en el aula, interacción que los investigadores ya habían previsto en la elaboración de los vídeos (Yates & Noyes, 2007). Finalmente, los alumnos han valorado positivamente la metodología.

Como propuesta de mejora, se potenciará la participación del alumnado para evitar las abstenciones en las respuestas y se incidirá en aquellos aspectos anteriormente expuestos que presentan mayor dificultad en el alumnado. Para ello, se mejorará el diseño de los vídeos incorporando unas secuencias que faciliten la comprensión de las mayores dificultades y otras que traten de evitar los errores de interpretación descubiertos. Por todo ello, la incorporación parcial del AI dando lugar a una metodología mixta, posibilitaría la apertura del proceso de enseñanza-aprendizaje más allá del aula y ofrecer la posibilidad de acceso al contenido teórico de forma interactiva y realizar actividades de un nivel cognitivo superior.

Bibliografía

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas). En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada: Comares.

Aronson, N., Arfstrom, K.M., & Tam, K. (2013). *Flipped learning in higher education*. Retrieved from http://www.flippedlearning.org.

Berret, D. (2012). *How 'flipping' the classroom can improve the traditional lecture.* Retrieved from http://chronicle.com

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. The United States of America: International Society for Technology in Education.

Bergmann, J., Overmyer, J., & Willie, B. (2014). *The flipped class: Myths vs. reality*. Retrieved from http://www.thedailyriff.com

Bishop, J.L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. Paper presented at *ASEE Annual Conference & Exposition*. Atlanta, American Society for Engineering Education.

Blázquez, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal.* Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V. pp. 331-354. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001a). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. 4(3), 219-236. *RELIME*. México DF. CLAME

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001b). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *AULA, 10, 117-133.* Salamanca.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas. 30, 67-82.* Graó. Barcelona.

Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of EducationalObjectives: The Classification of Educational Goals: *Handbook 1, Cognitive Domain*. New York: David McKay.

Bondad-Brown, B.A., Rice, R.E., & Pearce, K. E. (2012). Influences on TV viewing and online user-shared video use: Demographics, generations, contextual age, media use, motivations, and audience activity. *Journal of Broadcasting & Electronic Media, 56(4),* 471-493.

Bonwell,C.C., & Eison, J.A. (1991). *Active learning: Creating excitement in the classroom*. Washington, DC: The George Washington University, School of Education and Human Development.

Butt, A. (2014). Student views on the use of a flipped classroom approach: Evidence from Australia. *Business Education & Accreditations, 6*(1), 33-43.

Claros Mellado, F.J. Sánchez Compaña M.T. y Coriat Benarroch, M. (2013) "Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: Equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica", *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 31 , 113-131

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior. 15*, 167-192.

Cornu, B. (1983): *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Falk, L. K., Sockel, H., Chen, K. (2005). E-commerce and consumer's expectations: What makes a website work. *Journal of Website Promotion, 1(1),* 65-75.

Fernandez Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gatica, N. (2007). *Aprendizaje del concepto de límite funcional en alumnos de ingenierías.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Huang, J., Chen, R., & Wang, X. (2012). Factors influencing intention to forward short internet videos. *Social Behavior and Personality*. *40(1),* 5-14.

Kilpatrick, J. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* (Eds) J. Kilpatrick, P. Gómez, L. Rico. Una empresa docente. Universidad de los Andes, Bogotá

Leinhardt,G., Zaslavsky, O., & Stein, M.K. (1990. Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*. 60 (1), 1-64.

Miller, A. (2012). Five best practices for the flipped classroom. Retrieved from http://www.edutopia.org/blog/flipped-classroom-best-practices-andrew-miller

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias.* 28(2), 215-226. Barcelona.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades de las funciones. *Revista de investigación en Educación*. 12(2), pp. 209-221

Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Educaction.* 9 (3), 223-231.

Roehl, A., Reddy, S.L., & Shannon, G.J. (2013). The flipped classroom: An opportunity to engage millennial students through active learning strategies. *Journal of Family & Consumer Sciences, 105*(2), 44-49.
Sánchez Compaña, M.T. (2013). Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza. *Tesis doctoral. Universidad de Granada,* 519 p.
Socas, M. (2007): Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En *Investigación en Educación Matemática XI,* pp.19-52.
Talbert, R. (2011). Using MATLAB to teach problem-solving techniques to first-year liberal arts students. Mathworks News and Notes.
Talbert, R. (2013). Learning MATLAB in the inverted classroom. Computers in Education Journal. 23(2), 50–60.
Talbert, R. (2014). Inverting the linear algebra classroom. PRIMUS, Probl. Resour. Issues Math. Undergrad. Stud. 24(5), 361-374.
Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325-338.
Verleur, R., Heuvelman, A., & Verhagen, P.W. (2011). Trigger videos on the web: Impact of audiovisual design. *British Journal of Educational Technology*. 42(4), 573-582.
Yates, R., & Noyes, J.M. (2007). Web site design, self-monitoring style, and consumer preference. *Journal of Applied Social Psychology*. 37(6), 1341-1362.
Zayapragassarazan, Z. & Kumar, S. (2012). Active learning methods. *NTTC Bulletin. 19* (1), 3-5.

Rosa María Fernández: Licenciada en Matemáticas. Profesora de Educación Secundaria en el Instituto María Moliner de Laguna de Duero (Valladolid, España) y Profesora Asociada de la Universidad de Valladolid. Asesora de Matemáticas del Centro de Educación del Profesorado de Valladolid. Participante en varios congresos nacionales y regionales. Diploma de Estudios avanzados y doctorando.
rmfernandezb@educa.jcyl.es

Tomás Ortega: Catedrático de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Valladolid, Director de Departamento de Didáctica de las CCEE, CCSS y de la Matemática, ha sido Presidente de la SEIEM. Coordinador de evaluadores de doctorados de la DEVA. Ha impartido seminarios de investigación en másteres de varias universidades españolas, Participación en congresos nacionales e internacionales. Tiene al pie de 150 publicaciones entre revistas, capítulos de libro, libros y actas de congresos nacionales e internacionales. Dirección postal: Facultad de Educación y Trabajo Social. Paseo de Belén, 1, 47011-Valladolid.
tomas.ortega@uva.es

Cristina Pecharromán: Licenciada en Físicas. Profesora de Educación Secundaria en el Instituto Rescenvinto de Venta de Baños (Palencia, España). Tiene publicadas varias contribuciones en revistas nacionales e internacionales, un capítulo de libro y varias comunicaciones a congresos nacionales. Miembro del Proyecto de Excelencia RED-8. Está escribiendo con Tomás Ortega un capítulo de libro para esta red. Asimismo, está escribiendo con Tomás Ortega un libro por encargo de la editorial Síntesis.
cristina.pecharroman@uva.es